

เนื้อหา
คิจิตอลเบื้องต้น

การลดรูปฟังก์ชันโดยใช้หลักการของ Quine-McCluskey

วิธีการนี้จะเหมาะกับการหาฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายๆ และมีเอาต์พุตหลายตัว ตลอดจนสามารถนำหลักการไปประยุกต์เป็น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้ช่วยในการฟังก์ชันได้ด้วย พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้เพื่อทำความเข้าใจกับหลักการของ Quine-McCluskey

ตัวอย่างที่ 1 ให้ทำการลดรูปฟังก์ชัน $f(A,B,C,D,E) =$

$\Sigma m(1,3,4,7,9,11,12,13,15,19,20,23,25,27,28,29,31)$ โดยใช้หลักการ Q – M

วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1 ดำเนินการเปรียบเทียบผลต่างของ Minterm ในฟังก์ชันที่ต้องการลดรูปโดยให้ผลต่างของการเปรียบเทียบสามารถจัดอยู่ในรูป 2^n ได้ดังรูป List 1 – 4

ขั้นตอนที่ 2 สร้างตาราง Prime Implicant เพื่อหา Essential Prime Implicant

List 1

Minterm	ABCDE	
1	00001	}
4	00100	
3	00011	}
9	01001	
12	01100	
20	10100	
7	00111	}
11	01011	
13	01101	
19	10011	
25	11001	
28	11100	
15	01111	}
23	10111	
27	11011	
29	11101	
31	11111	} 5

กลุ่มที่ 1 Minterm ที่ประกอบด้วยลอจิก “1” จำนวน 1 ตัว

กลุ่มที่ 2 Minterm ที่ประกอบด้วยลอจิก “1” จำนวน 2 ตัว

กลุ่มที่ 3 Minterm ที่ประกอบด้วยลอจิก “1” จำนวน 3 ตัว

กลุ่มที่ 4 Minterm ที่ประกอบด้วยลอจิก “1” จำนวน 4 ตัว

กลุ่มที่ 5 Minterm ที่ประกอบด้วยลอจิก “1” จำนวน 5 ตัว

List 1		List 2		List 3	
Minterm	ABCDE	Minterm	ABCDE	Minterm	ABCDE
1	00001 ✓	1,3	000_1 ✓	1,3,9,11	0_0_1 PI3
4	00100 ✓	1,9	0_001 ✓	4,12,20,28	_ _100 PI4
3	00011 ✓	4,12	0_100 ✓	3,7,11,15	0_ _11 ✓
9	01001 ✓	4,20	_0100 ✓	9,13,11,15	01_ _1 ✓
12	01100 ✓	3,7	00_11 ✓	3,19,7,23	01_ _1 ✓
20	10100 ✓	9,11	010_1 ✓	3,7,19,23	_0_11 ✓
7	00111 ✓	9,13	01_01 ✓	9,25,11,27	_0_11 ✓
11	01011 ✓	12,13	0110_ ✓	9,11,25,27	_10_1 ✓
13	01101 ✓	3,19	_0011 ✓	9,25,13,29	_1_01 ✓
19	10011 ✓	9,25	_1001 ✓	9,13,25,29	_1_01 ✓
25	11001 ✓	12,28	_1100 ✓	7,23,15,31	_ _111 ✓
28	11100 ✓	20,28	1_100 ✓	11,27,15,31	_1_11 ✓
15	01111 ✓	7,15	0_111 ✓	13,29,15,31	_11_1 ✓
23	10111 ✓	11,15	01_11 ✓	19,27,23,31	1_ _11 ✓
27	11011 ✓	13,15	011_1 ✓	19,23,27,31	1_ _11 ✓
29	11101 ✓	7,23	_0111 ✓	25,29,27,31	11_ _1 ✓
31	11111 ✓	19,23	10_11 ✓	25,27,29,31	11_ _1 ✓
		11,27	_1011 ✓		
		19,27	1_011 ✓		
		25,27	110_1 ✓		
		13,29	_1101 ✓		
		25,29	11_01 ✓		
		28,29	1110_ ✓		
		15,31	_1111 ✓		
		23,31	1_111 ✓		
		27,31	11_11 ✓		
		29,31	111_1 ✓		

List 4

	Minterm		ABCDE														
	3,7,11,15,19,23,27,31		_ _ _11		PI2												
	9,13,11,15,25,29,27,31		_1_ _1		PI1												
	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Minterm \ PI	1	3	4	7	9	11	12	13	15	19	20	23	25	27	28	29	31
*PI1					X	X	⊗	X				⊗	X		⊗	X	
*PI2		X		⊗		X		X	X		⊗		X				X
*PI3	⊗	X			X	X											
*PI4			⊗				⊗				⊗				⊗		

ตาราง Prime Implicant

$$f(A,B,C,D,E) = \text{PI1} + \text{PI2} + \text{PI3} + \text{PI4}$$

$$= _1_ _1 + _ _ _ 11 + 0_0_1 + _ _ 100$$

$$= B E + DE + \overline{\overline{A}} \overline{\overline{C}} D + \overline{\overline{C}} \overline{\overline{D}} E$$

ตอบ $f(A,B,C,D,E) = \overline{\overline{B}} \overline{\overline{E}} + DE + \overline{\overline{A}} \overline{\overline{C}} D + \overline{\overline{C}} \overline{\overline{D}} E$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ทำการลดรูปฟังก์ชัน $f(A,B,C,D,E) = \Sigma m(2,3,7,10,12,15,27) + dc(5,18,19,21,23)$ โดยใช้หลักการ Q- M

วิธีทำ

แบ่งกลุ่ม Minterm และทำการเปรียบเทียบผลต่างของ Minterm

List 1		List 2		List 3	
Minterm	ABCDE	Minterm	ABCDE	Minterm	ABCDE
2	00010 ✓	2,3	000_1 ✓	2,3,8,19	_001_ PI1
3	00011 ✓	2,10	0_001 PI4	3,7,19,23	_0_11 PI2
5	00101 ✓	2,18	_0010 ✓	5,7,21,23	_01_1 PI3
10	01010 ✓	3,7	00_11 ✓		
12	01100 PI7	3,19	_0011 ✓		
18	10010 ✓	5,7	001_1 ✓		
7	00111 ✓	5,21	_0101 ✓		
19	10011 ✓	18,19	1001_ ✓		
21	10101 ✓	7,15	0_111 PI5		
15	01111 ✓	7,23	_0111 ✓		
23	10111 ✓	19,23	10_11 ✓		
27	11011 ✓	19,27	1_011 PI6		
		21,23	101_1 ✓		

ตาราง Prime Implicant

นำผลจากตารางเปรียบเทียบผลต่างมาสร้างตาราง Prime Implicant เพื่อหาค่า Essential Prime Implicant

✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ |

Minterm \ PI	2	3	7	10	12	15	27
*PI1	X	X					
*PI2		X	X				
*PI3			X				
*PI4	X			⊗			
*PI5			X			⊗	
*PI6							⊗
*PI7					⊗		

$$\begin{aligned}
 f(A,B,C,D,E) &= \text{PI1}+\text{PI4}+\text{PI5}+\text{PI6}+\text{PI7} \\
 &= _001_+0_010+0_111+1_011+01100 \\
 &= \overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{C}D\overline{E} + \overline{A}CDE + A\overline{C}DE + \overline{A}BC\overline{D}\overline{E}
 \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
 f(A,B,C,D,E) &= \text{PI2}+\text{PI4}+\text{PI5}+\text{PI6}+\text{PI7} \\
 &= _0_11+0_010+0_111+1_011+01100 \\
 &= \overline{B}CE + \overline{A}\overline{C}D\overline{E} + \overline{A}CDE + A\overline{C}DE + \overline{A}BC\overline{D}\overline{E}
 \end{aligned}$$

ตอบ $f(A,B,C,D,E) = \overline{B}CE + \overline{A}\overline{C}D\overline{E} + \overline{A}CDE + A\overline{C}DE + \overline{A}BC\overline{D}\overline{E}$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ทำการออกแบบวงจรลอจิก โดยให้ผลแสดงทางด้านเอาต์พุต เป็นไปตามฟังก์ชันที่

กำหนดและให้ใช้หลักการของ Q- M ในการออกแบบ

$$f\alpha(A,B,C,D,E) = \Sigma m(0,2,7,10) + dc(12,15)$$

$$f\beta(A,B,C,D,E) = \Sigma m(2,4,5) + dc(6,7,8,10)$$

$$f\gamma(A,B,C,D,E) = \Sigma m(2,7,8) + dc(0,5,13)$$

วิธีทำ

จัดการแบ่งกลุ่ม Minterm ทั้ง 3 ฟังก์ชันตามจำนวนลอจิก “1” ออกเป็นกลุ่มๆ และเขียนฟังก์ชันกำกับตัว Minterm แต่ละตัว โดยใช้เงื่อนไขตามตัวอย่างที่ผ่านมาแสดงดังรูป List1

List 1		
Minterm	ABCD	Function
0	0000	$\alpha\gamma$
2	0010	$\alpha\beta\gamma$
4	0100	β
8	1000	$\beta\gamma$
5	0011	$\beta\gamma$
6	0101	β
10	1010	$\alpha\beta$
12	1100	α
7	1011	$\alpha\beta\gamma$
13	1101	γ
15	1111	α

ตารางแบ่งกลุ่มใน List 1

สร้างตาราง PI เพื่อหาค่า Essential Prime Implicant จากตัวอย่างจะมี Don't care อยู่ ทั้ง 3 ฟังก์ชัน โดยเราจะไม่ได้ค่า PI ที่ Minterm เป็น Don't care ในตาราง PI จะเห็นว่าในแถว PI6,PI8 และ PI12 ไม่มีการทำเครื่องหมายกากบาทและอีกกรณีในแถว PI11 ถึงแม้ว่า Minterm ตัวที่ 8 ของ $f\beta$ จะเป็น Don't care แต่ Minterm ตัวที่ 8 ของ $f\gamma$ มีค่าเป็น "1" จึงต้องใส่ลง ตาราง PI ด้วย

List 1			List 2			List 3		
Minterm	ABCDE	Function	Minterm	ABCDE	Function	Minterm	ABCDE	Function
0	0000	$\alpha \gamma$ ✓	0,2	00_0	$\alpha \gamma$ P2	4,5,6,7	01__	β P1
2	0010	$\alpha\beta\gamma$ P10	0,8	_000	γ P3			
4	0100	β ✓	2,6	0_10	β P4			
8	1000	$\beta\gamma$ P11	2,10	_010	$\alpha\beta$ P5			
5	0101	$\beta\gamma$ ✓	4,5	010_	β ✓			
6	0110	β ✓	4,6	01_0	β ✓			
10	1010	$\alpha\beta$ ✓	8,10	10_0	β P6			
12	1100	α P12	5,7	01_1	$\beta\gamma$ P7			
7	0111	$\alpha\beta\gamma$ P13	5,13	_101	γ P8			
13	1101	γ ✓	6,7	011_	β ✓			
15	1111	α ✓	7,15	_111	α P9			

ตารางการเปรียบเทียบใน List ที่ 1 ,2 และ 3

จากผลของตาราง PI ทำให้เราได้ Essential Prime Implicant คือ PI1,PI2 และ แต่ Essential Prime Implicant ทั้ง 3 ไม่สามารถที่จะครอบคลุม Minterm ตัวที่ 7 ของ $f\alpha$ และ Minterm ตัวที่ 7,8 ของ $f\gamma$ เพราะฉะนั้นเราต้องหา PI ที่สามารถครอบคลุม Minterm เหล่านี้อีกครั้งหนึ่ง

		$f\alpha$				$f\beta$			$f\gamma$		
		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
PI \ Minterm		0	2	7	10	2	4	5	2	7	8
*PI1							⊗	X			
*PI2		⊗	X						X		
PI3											X
PI4						X					
*PI5			X		⊗	X					
PI6											
PI7								X		X	
PI8											
PI9				X							
PI10			X			X			X		
PI11											X
PI12											
PI13				X						X	

ตารางแสดง Prime Implicant

		$f\alpha$	$f\gamma$	
PI \ Minterm		7	7	8
PI3				X
PI7			X	
PI9		X		
PI11				X
PI13		X	X	

ตารางแสดง Prime Implicant โดยเลือก PI ที่ครอบคลุม Minterm ที่เหลือ

จากตาราง Prime Implicant ในรูปด้านบน การหา PI ที่สามารถครอบคลุม Minterm ที่เหลือเราสามารถเลือกชุดใดก็ได้ โดยคำนึงถึงการใช้จำนวนของลอจิกเกตที่จะต้องประหยัดที่สุด เพราะฉะนั้นตัวอย่างนี้จึงทำการเลือก PI3 และ PI13 จะได้ผลลัพธ์การลดรูปดังนี้

$$\begin{aligned}
 f\alpha(A,B,C,D) &= \Sigma m(0,2,7,10) + \Theta(12,15) \\
 &= PI2 + PI5 + PI13 \\
 &= (00_0) + (_010) + (0111) \\
 &= \overline{A}\overline{B}\overline{D} + \overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BCD
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f\beta(A,B,C,D) &= \Sigma m(2,4,5) + \Theta(6,7,8,10) \\
 &= PI2 + PI5 \\
 &= (01_)_ + (_010) \\
 &= \overline{A}B + \overline{B}\overline{C}\overline{D}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f\gamma(A,B,C,D) &= \Sigma m(2,7,8) + \Theta(0,5,13) \\
 &= PI2 + PI3 + PI13 \\
 &= (00_0) + (_000) + (0111) \\
 &= \overline{A}\overline{B}\overline{D} + \overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BCD
 \end{aligned}$$

